目　录

01　2010 年全国高中数学联赛天津市预赛 ………………………… 1
02　2010 年全国高中数学联赛河北省预赛 ………………………… 9
03　2010 年全国高中数学联赛山西省预赛 ………………………… 21
04　2010 年全国高中数学联赛辽宁省预赛 ………………………… 28
05　2010 年全国高中数学联赛吉林省预赛 ………………………… 40
06　2010 年全国高中数学联赛山东省预赛 ………………………… 49
07　2010 年全国高中数学联赛福建省预赛 ………………………… 68
08　2010 年全国高中数学联赛江西省预赛 ………………………… 81
09　2010 年全国高中数学联赛河南省预赛 ………………………… 90
10　2010 年全国高中数学联赛湖北省预赛 ………………………… 101
11　2010 年全国高中数学联赛四川省预赛 ………………………… 111
12　2010 年全国高中数学联赛陕西省预赛 ………………………… 124
13　2010 年全国高中数学联赛甘肃省预赛 ………………………… 134
14　2010 年全国高中数学联赛黑龙江省预赛 ……………………… 143
15　2010 年全国高中数学联赛江苏省复赛 ………………………… 156
16　2010 年全国高中数学联赛贵州省预赛 ………………………… 166
17　2010 年全国高中数学联赛安徽省预赛 ………………………… 173
18　2010 年浙江省高中数学竞赛 ………………………………… 178
19　2010 年湖南省高中数学竞赛 ………………………………… 190
20　2010 年全国高中数学联赛新疆维吾尔自治区预赛 ……… 201
21　2010 年全国高中数学联赛 ………………………………… 213

01

2010 年全国高中数学联赛
天津市预赛

2010 年全国高中数学联赛天津市预赛于 2010 年 9 月 22 日举行，共有五千多名中学生参加此次预赛，并从中选拔出九百多名学生参加于 10 月 17 日举行的全国高中数学联赛.

天津市预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，但在方法的要求上有所提高. 主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括 8 道填空题和 3 道解答题，全卷满分 120 分，考试时间为两小时.

天津市预赛的命题工作由数学会负责，组织工作由科协五学科竞赛管理委员会办公室负责，阅卷及报送参加全国高中数学联赛的名单由各区县教研室具体实施.

天津

试　题

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 设实数 a、b、c 满足 $a^2-bc-2a+10=0$,$b^2+bc+c^2-12a-15=0$,则 a 的取值范围是________.

2 满足 $a^2+ab+b^2=2010$ 的正整数解 (a,b) 构成的集合为________.

3 已知 $x_1, x_2, \cdots, x_{2010}$ 均为正实数,则

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2010}}{x_1x_2\cdots x_{2009}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2010}}$$

的最小值为________.

4 已知非等腰锐角 $\triangle ABC$ 的外心、内心和垂心分别为 O、I、H,$\angle A=60^\circ$. 若 $\triangle ABC$ 的三条高线分别为 AD、BE、CF,则 $\triangle OIH$ 的外接圆半径与 $\triangle DEF$ 的外接圆半径之比为________.

5 在一个房间中,地面是边长为 6 米的正方形,其中心设为 O,要在正对着 O 的房顶上安装一盏灯 V,已知灯照射的角度为 90°(所有由 V 照射出的光线的边界所夹角度的最大值,即光线的边界与 VO 的夹角为 45°),若使得房间的每个地方都能照到,VO 的最小值为________米.

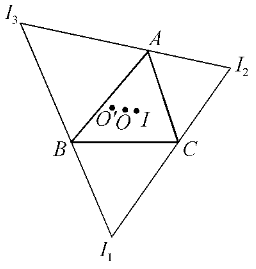
6 若关于 x 的函数 $f(x)=|x-[x+a]|$ 存在最大值 $M(a)$,则正实数 a 的取值范围是________,其中 $[y]$ 表示不超过 y 的最大整数.

7 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F,直线 l:$y=kx+d$ 不过点 F,且与双曲线的右支交于点 P、Q,若 $\angle PFQ$ 的外角平分线与 l 交于点 A,则点 A 的横坐标为________.

8 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是 1, 2, 3, 4, 5 的一个排列,且满足 $|a_i-a_{i+1}|\neq 1(i=1,2,3,4)$,则满足条件的排列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的数目为________.

二、解答题(本大题共 3 小题,共 56 分)

9 (16 分)设$\triangle ABC$ 的外心、内心分别为 O、I,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的旁心分别为 I_1、I_2、I_3. 证明(1)$\triangle I_1I_2I_3$ 为锐角三角形;(2)若$\triangle I_1I_2I_3$ 的外心为 O',则 O'、O、I 三点共线.



(第 9 题)

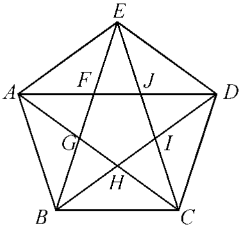
10 (20 分)已知有理数数列 $\{a_n\}(n=0,1,2,\cdots)$ 满足 $a_n=\alpha x_1^n+\beta x_2^n\neq 0(n=0,1,2,\cdots)$,其中 α、β 为实数,x_1,$x_2\in\mathbf{C}$($\mathbf{C}$ 为复数集),且 $x_1x_2=1$,证明(1)x_1+x_2 为有理数;(2) 若 x_1、x_2 不是实数,则 $\alpha=\beta$.

11 (20 分)正五边形 $ABCDE$ 的对角线 BE 分别与对角线 AD、AC 交于点 F、G,对角线 BD 分别与对角线 CA、CE 交于点 H、I,对角线 CE 与对角线 AD 交于点 J,设由图中的 10 个点 A,B,C,D,E,F,G,H,I,J 和线段构成的等腰三角形的集合为 M.

(1) 求 M 中元素的数目;

(2) 若将这 10 个点中的每个点任意染为红、蓝两种颜色之一,问是否一定存在 M 中的一个等腰三角形,其三个顶点同色?

(3) 若将这 10 个点中的任意 n 个点染为红色,使得一定存在 M 中的一个等腰三角形,其三个顶点同为红色,求 n 的最小值.



(第 11 题)

解　答

1 $1\leqslant a\leqslant 5$　提示:由

$$bc=a^2-2a+10,$$

$$(b+c)^2=bc+12a+15,$$

天津

得

$$(b+c)^2=a^2+10a+25=(a+5)^2,$$

$b+c=\pm(a+5)$,因此 b、c 是方程

$$x^2\mp(a+5)x+a^2-2a+10=0$$

的两个根,于是有

$$\Delta=(a+5)^2-4(a^2-2a+10)\geqslant 0,$$

即 $a^2-6a+5\leqslant 0$,从而可得 $1\leqslant a\leqslant 5$.

2　$\varnothing$　提示:若 a、b 同为奇数或一个为奇数一个为偶数,则 a^2+ab+b^2 为奇数,与 2010 是偶数矛盾;若 a、b 同为偶数,则 a^2+ab+b^2 是 4 的倍数,与 2010 模 4 余 2 矛盾,所以原不定方程无解.

3　4　提示:从最后两项开始,反复应用均值不等式可得

$$\begin{aligned}
&x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2010}}{x_1x_2\cdots x_{2009}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2010}}\\
\geqslant\ &x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2009}}{x_1x_2\cdots x_{2008}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2009}}\\
\geqslant\ &x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2008}}{x_1x_2\cdots x_{2007}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2008}}\\
\geqslant\ &\cdots\geqslant x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{4}{x_1x_2}\\
\geqslant\ &x_1+\frac{4}{x_1}\geqslant 4,
\end{aligned}$$

其中等号成立的条件为

$$x_{n+1}=x_n=\cdots=x_1=2,$$

因此

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2010}}{x_1x_2\cdots x_{2009}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2010}}$$

的最小值为 4.

4　2　提示:因为

天津

$$\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC = 120^\circ,$$

所以 O、I、H、B、C 五点共圆. 设$\triangle ABC$、$\triangle OIH$ 的外接圆半径分别为 R、r,由正弦定理知

$$2R\sin\angle A = BC = 2r\sin\angle BOC,$$

于是有 $r = R$.

设$\triangle DEF$ 的外接圆半径为 r',由于 A、E、H、F 四点共圆,且 AH 为该圆的直径,由正弦定理知

$$EF = AH\sin\angle A = 2R\cos\angle A\sin\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

又因为 A、F、D、C 四点共圆,A、E、D、B 四点共圆,所以

$$\angle BDF = \angle CDE = \angle BAC = 60^\circ,$$

于是可得 $\angle FDE = 60^\circ$, 由正弦定理知

$$EF = 2r'\sin\angle FDE = \sqrt{3}r',$$

因此有 $r' = \frac{R}{2}$,从而可得$\frac{r}{r'} = 2$.

注: $\triangle DEF$ 的外接圆实际上就是$\triangle ABC$ 的九点圆, 于是有 $r' = \frac{R}{2}$.

5 $3\sqrt{2}$ 提示:设边长为 6 米的正方形为 $ABCD$,当$\triangle VAC$ 为等腰直角三角形时,斜边 AC 上的高 $3\sqrt{2}$ 即为 VO 的最小值.

6 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 提示:设 $x + a = N + \alpha$,其中 N 为整数, $0 \leqslant \alpha < 1$, 则

$$f(x) = |x - [x + a]| = |N + \alpha - a - N| = |\alpha - a|.$$

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $-a \leqslant \alpha - a < 1 - a$. 因为 $|1 - a| > |-a|$, 所以 $f(x)$ 没有最大值;

天津

当 $a \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$-a \leqslant \alpha - a < 1 - a$. 因为 $|-a| \geqslant |1-a|$，所以 $f(x)$ 有最大值，且当 $\alpha = 0$，即 $x + a$ 为整数时，$f(x)$ 的最大值 $M(a) = a$.

7 $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 提示：过点 A 作 x 轴的垂线 h，设 P、Q 在直线 h 上的投影分别为 P'、Q'，则有

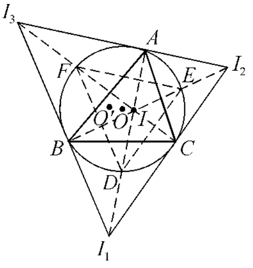
$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AP}{AQ} = \frac{FP}{FQ},$$

即 $\frac{PF}{PP'} = \frac{QF}{QQ'}$，因为 A 是 $\angle PFQ$ 的外角平分线与 l 的交点，所以直线 h 为双曲线的右准线，因此点 A 的横坐标为 $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8 14 提示：满足条件的排列有：

1，3，5，2，4；1，4，2，5，3；2，4，1，3，5；2，4，1，5，3；2，5，3，1，4；3，1，4，2，5；3，1，5，2，4；3，5，1，4，2；3，5，2，4，1；4，1，3，5，2；4，2，5，1，3；4，2，5，3，1；5，2，4，1，3；5，3，1，4，2.

9 (1) 因为 $\angle I_3I_1I_2 = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} < 90^\circ$，所以 $\angle I_3I_1I_2$ 为锐角. 同理可得 $\angle I_1I_2I_3$，$\angle I_2I_3I_1$ 也为锐角，因此 $\triangle I_1I_2I_3$ 为锐角三角形.



（第 9 题）

(2) 设 AI_1、BI_2、CI_3 分别与圆 O 交于点 D、E、F，则 D、E、F 分别为 II_1、II_2、II_3 的中点，所以 I 为 $\triangle DEF$ 与 $\triangle I_1I_2I_3$ 的位似中心，且位似比为 2，而 $\triangle DEF$ 的外心就是 $\triangle ABC$ 的外心，因此 O'、O、I 三点共线，且 O 为 IO' 的中点.

10 (1) 因为

$$a_0 = \alpha + \beta,\ a_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,\ a_2 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2,$$

天津

所以

$$a_0x_1 - a_1 = \beta(x_1 - x_2),$$
$$a_1x_1 - a_2 = \beta x_2(x_1 - x_2),$$

从而可得

$$a_1x_1 - a_2 = x_2(a_0x_1 - a_1),$$

即

$$a_2 - (x_1 + x_2)a_1 + a_0 = 0.$$

由于 a_0、a_1、a_2 为非零有理数，于是可得 $x_1 + x_2$ 为有理数.

（2）因为 x_1、x_2 不是实数，且 $x_1 + x_2$ 为有理数，可设 $x_1 = b_1 + c\mathrm{i}$，$x_2 = b_2 - c\mathrm{i}$，其中 b_1、b_2、c 为实数，且 $c \neq 0$. 再由

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha(b_1 + c\mathrm{i}) + \beta(b_2 - c\mathrm{i}) \\ &= (\alpha b_1 + \beta b_2) + (\alpha - \beta)c\mathrm{i}, \end{aligned}$$

依题意又有 α、β 为实数，所以 $(\alpha - \beta)c = 0$，从而有 $\alpha = \beta$.

11　（1）因为由图中的 10 个点 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 和线段构成的三角形均为等腰三角形，所以

$$|M| = \mathrm{C}_5^3 + 4\mathrm{C}_5^4 + 5\mathrm{C}_5^5 = 35.$$

（2）一定存在 M 中的一个等腰三角形，其三个顶点同色，这是因为由抽屉原则知，A、B、C、D、E 中一定有三个点同色，且这三个点构成的三角形属于 M.

（3）n 的最小值为 6.

若 $n=5$，则将 F、G、H、I、J 染为红色，则不存在属于 M 的顶点同为红色的三角形.

若 $n \geqslant 6$，当 A、B、C、D、E 中有不少于三个红点时，一定存在属于 M 且顶点同为红色的三角形；当 A、B、C、D、E 中少于三个红点时，F、G、H、I、J 中至少有 4 个红点.

若 F、G、H、I、J 中恰有 4 个红点，不妨假设 F、G、H、J 为红点，则 A、B、C、D、E 中至少有两个红点. 若 A、B、E 中有一个

天津

点是红点,不妨假设 A 为红点,则$\triangle AFG$ 是属于M 且顶点同为红色的三角形. 否则 C、D 同为红色,于是$\triangle CDH$ 是属于M 且顶点同为红色的三角形. 若 F、G、H、I、J 均为红色,则 A、B、C、D、E 至少有一个点为红色,不妨假设 A 为红点,则$\triangle AFG$ 是属于M 且顶点同为红色的三角形.

因此 n 的最小值为 6.

天津

02

2010 年全国高中数学联赛 河北省预赛

受河北省数学会委托，河北省数学会普及工作委员会会同河北师范大学数学与信息科学学院共同组织承办了 2010 年全国高中数学联赛河北省预赛暨河北省高中数学竞赛.

河北省高中数学竞赛所涉及的知识范围不超出现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，在方法的要求上略有提高，主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括 6 道选择题、6 道填空题和 5 道解答题. 全卷满分 150 分. 竞赛活动时间在 2010 年 5 月 16 日（星期日）上午.

参加比赛的学生来自河北省 11 个地市的高中生约 35 000 人. 通过比赛，根据成绩按赛区选拔 1800 名同学参加 2010 年全国高中数学联赛.

河北

试　题

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1 　**已知关于** x **的不等式** $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geqslant k$ **有实数解,则实数** k **的取值范围是(　　).**

(A) $(0,\ 2]$　　　　(B) $(-\infty,\ 0]$

(C) $(-\infty,\ 0)$　　　　(D) $(-\infty,\ 2]$

2 　**将正偶数集合** $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ **从小到大按第** n **组有** $2n-1$ **个数进行分组:** $\{2\}$,$\{4, 6, 8\}$,$\{10, 12, 14, 16, 18\}$, …,**问** 2010 **位于第(　　)组中.**

(A) 30　　(B) 31　　(C) 32　　(D) 33

3 　**四面体** $S-ABC$ **中,三组对棱分别相等,依次为** 5、4、x,**则** x **的取值范围为(　　).**

(A) $(2,\ \sqrt{41})$　　　　(B) $(3,\ 9)$

(C) $(3,\ \sqrt{41})$　　　　(D) $(2,\ 9)$

4 　**对于任意的整数** $n(n\geqslant 2)$,**满足** $a^n=a+1$, $b^{2n}=b+3a$ **的正数** a **和** b **的大小关系(　　).**

(A) $a>b>1$　　　　(B) $b>a>1$

(C) $a>1,\ 0<b<1$　　　　(D) $0<a<1,\ b>1$

5 　**函数** $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ **的图象的对称中心为(　　).**

(A) $(-1,\ 2)$　　　　(B) $(1,\ 2)$

(C) $(-1,\ -2)$　　　　(D) $(1,\ -2)$

6 　**从满足** $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 1)$ **的数列** $\{a_n\}$ **中,依次抽出能被** 3 **整除的项组成数列** $\{b_n\}$,**则** $b_{100}=$ **(　　).**

(A) a_{100}　　(B) a_{200}　　(C) a_{300}　　(D) a_{400}

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7 　**函数** $y=f(x+1)$ **的反函数是** $y=f^{-1}(x+1)$,**且** $f(1)=4007$,**则** $f(1998)=$ ________.

8 **正三棱柱** $ABC-A_1B_1C_1$ **的各条棱长均为** 3，**长为** 2 **的线段** MN **的一个端点** M **在** AA_1 **上运动，另一端点** N **在底面** ABC **上运动，则** MN **的中点** P **的轨迹（曲面）与正三棱柱共顶点** A **的三个面所围成的几何体的体积为**________.

9 **已知圆** $C_1:(x+3)^2+y^2=4$，$C_2:x^2+(y-5)^2=4$，**过平面内的点** P **有无数多对互相垂直的直线** l_1、l_2，**它们分别与圆** C_1、**圆** C_2 **相交，且被圆** C_1、**圆** C_2 **截得的弦长相等，则** P **点坐标为**

________.

10 **由** $1, 2, \cdots, n$ **排列而成的** n **项数列** $\{a_n\}$ **满足：每项都大于它之前的所有项或者小于它之前的所有项，则满足这样条件的数列** $\{a_n\}$ **的个数为**________.

11 **已知二次函数** $y=ax^2+bx+c\geqslant 0(a<b)$，**则** $M=\dfrac{a+2b+4c}{b-a}$ **的最小值为** ________.

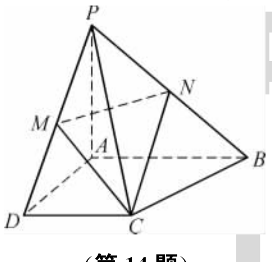
12 **某家电影院的票价为每张** 5 **元，现有** 10 **个人，其中** 5 **个人手持** 5 **元钞票，另外** 5 **个人手持** 10 **元钞票，假设开始售票时售票处没有钱，这** 10 **个人随机排队购票. 则售票处不会出现找不开钱的局面的概率是**________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分）

13 （10 **分**）**已知** $a, b\in[1, 3]$，$a+b=4$，**求证：**

$$\sqrt{10}\leqslant\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}<\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

14 （10 **分**）**如图：四棱锥** $P-ABCD$，$PA\perp$ **平面** $ABCD$，**且** $PA=4$，**底面** $ABCD$ **为直角梯形，** $\angle CDA=\angle BAD=90°$，$AB=2$，$CD=1$，$AD=\sqrt{2}$，$M$、$N$ **分别为** PD、PB **的中点，平面** MCN **与** PA **交点为** Q.



（第 14 题）

（1）**求** PQ **的长度；**

河北

（2）**求截面** MCN **与底面** $ABCD$ **所成二面角的大小；**

（3）**求点** A **到平面** MCN **的距离.**

15 （10 **分**）**设** $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$，$n \in \mathbf{N}^*$.

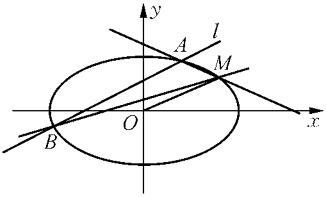
证明：（1）**对所有的** n，$a_n \equiv 3(\bmod 4)$；

（2）**当** $m \neq n$ **时，**$(a_m, a_n) = 1$（a_m、a_n **互质**）.

16 （15 **分**）**已知椭圆** C **过点** $M(2, 1)$，**两个焦点分别为**$(-\sqrt{6}, 0)$，$(\sqrt{6}, 0)$. O **为坐标原点，平行于** OM **的直线** l **交椭圆** C **于不同的两点** A、B.

（1）**求**$\triangle OAB$ **面积的最大值；**

（2）**证明：直线** MA、MB **与** x **轴围成一个等腰三角形.**



（**第 16 题**）

17 （15 **分**）**已知函数** $f(x) = \frac{1}{2}mx^2 - 2x + 1 + \ln(x+1)$ $(m \geqslant 1)$.

（1）**若曲线** $C: y = f(x)$ **在点** $P(0, 1)$ **处的切线** l **与** C **有且只有一个公共点，求** m **的值；**

（2）**求证：函数** $f(x)$ **存在单调递减区间**$[a, b]$，**并求出单调递减区间的长度** $t = b - a$ **的取值范围.**

解　答

1 D　**提示：令** $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$，$0 \leqslant x \leqslant 2$，**则**

$$y^2 = x + (2-x) + 2\sqrt{x(2-x)} \leqslant 4.$$

故 $0 < y \leqslant 2$，**且** $x = 2 - x$，**即** $x = 1$ **时等号成立，所以实数** k **的取值范围是**$(-\infty, 2]$.

2 C　**提示：**2010 **是数列** $a_n = 2n$ **的第** 1005 **项，设** 2010 **位于第** n **组，则**

$$\begin{cases} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \geqslant 1005, \\ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) < 1005, \end{cases}$$

即$\begin{cases}n^2 \geqslant 1005, \\ (n-1)^2 < 1005,\end{cases}$所以 $n=32$,故 2010 位于第 32 组.

3 C 提示:将四面体嵌入到长方体中,设长方体的棱长分别为 a、b、c,则$\begin{cases}a^2+c^2=4^2, \\ b^2+c^2=5^2,\end{cases}$从而 $0<c<4$. 所以

$$x=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+5^2-2c^2} \in (3, \sqrt{41}).$$

4 A 提示:由题意知 $a>1$, $b>1$,又 $a^{2n}-a=a^2+a+1$, $b^{2n}-b=3a$,而 $a^2+a+1>3a$,所以 $a^{2n}-a>b^{2n}-b$,从而得 $a>b>1$.

5 B 提示:因为 $f(x)=(x-1)^3+2$,所以函数图象的对称中心为 $(1, 2)$.

6 D 提示:易知 $a_{4k}(k \geqslant 1)$ 能被 3 整除,故选 D.

7 2010 提示:由 $y=f^{-1}(x+1)$ 得:$x+1=f(y)$,即 $x=f(y)-1$,所以 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数为 $y=f(x)-1$,即 $f(x+1)-f(x)=-1$,令 $x=1, 2, \cdots, 1997$,各式相加得:

$$f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+\cdots+f(1998)-f(1997)=-1997,$$

化简得

$$f(1998)-f(1)=-1997,$$

所以

$$f(1998)=2010.$$

8 $\frac{1}{9}\pi$ 提示:由题目条件可知:MN 的中点 P 到点 A 的距离恒为 1,所以点 P 的轨迹是以 A 为球心、半径为 1 的球面且在三棱柱内的部分,故所围成的几何体体积是 $\frac{1}{6}V_{半球}=\frac{1}{9}\pi$.

9 $P(1, 1)$或 $P(-4, 4)$ 提示:设 $P(a, b)$,直线 l_1、l_2 的方程分别为

$$y-b=k(x-a),$$

$$y-b=-\frac{1}{k}(x-a),$$

河北

即

$$kx - y - ka + b = 0,$$
$$x + ky - a - bk = 0.$$

易得圆心 $C_1(-3, 0)$ 到 l_1 的距离与圆心 $C_2(0, 5)$ 到 l_2 的距离相等，即

$$\frac{|-3k - ak + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|5k - a - bk|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

亦即

$$|(3 + a)k - b| = |(5 - b)k - a|,$$

平方整理得：

$$[(3 + a)^2 - (b - 5)^2]k^2 - (4ab - 10a + 6b)k + b^2 - a^2 = 0.$$

此等式对无数多个 k 成立，故

$$\begin{cases}(3 + a)^2 - (b - 5)^2 = 0, \\ 4ab - 10a + 6b = 0, \\ b^2 - a^2 = 0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a = 1, \\ b = 1,\end{cases}$ $\begin{cases}a = -4, \\ b = 4.\end{cases}$

故 $P(1, 1)$ 或 $P(-4, 4)$.

10　2^{n-1}　提示：设所求的个数为 A_n，则 $A_1 = 1$. 对 $n > 1$，如果 n 排在第 i 位，则它之后的 $n - i$ 个数完全确定，只能是 $n - i$，$n - i - 1$，…，2，1. 而它之前的 $i - 1$ 个数，$n - i + 1$，$n - i + 2$，…，$n - 1$，有 A_{i-1} 种排法，令 $i = 1, 2, \cdots, n$，得递推关系：

$$\begin{aligned}A_n &= 1 + A_1 + \cdots + A_{n-2} + A_{n-1} \\ &= (1 + A_1 + \cdots + A_{n-2}) + A_{n-1} \\ &= A_{n-1} + A_{n-1} = 2A_{n-1},\end{aligned}$$

由此得 $A_n = 2^{n-1}$.

河北

11 8 **提示：由条件易知** $a>0$，$b^2-4ac\leqslant 0$，**所以** $a>0$，$c\geqslant\frac{b^2}{4a}$.

$$M=\frac{a+2b+4c}{b-a}\geqslant\frac{a+2b+\frac{b^2}{a}}{b-a}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)},$$

令 $t=\frac{b}{a}$，**则** $t>1$.

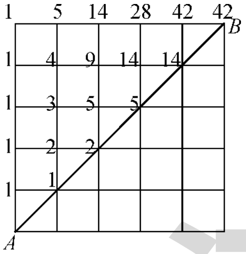
$$\begin{aligned}M&=\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}\\&=\frac{t^2+2t+1}{t-1}\\&=(t-1)+\frac{4}{t-1}+4\\&\geqslant 2\sqrt{4}+4=8,\end{aligned}$$

等号成立的充分必要条件为 $t=3$，$b^2=4ac$，**即** $b=3a$，$c=\frac{9}{4}a$.

所以 M **的最小值为** 8.

12 $\frac{1}{6}$ **提示：考虑手持** 5 **元的** 5 **个人在队中的位置，共有** $C_{10}^5=252$ **种等可能的排队方式. 设** $p(m,n)$ **表示** m **个手持** 5 **元、**n **个手持** 10 **元的人满足条件的排队方式数，则** $p(m,0)=1$，**当** $m<n$ **时**，$p(m,n)=0$，**且**

$$p(m,n)=p(m,n-1)+p(m-1,n).$$



（第 12 题）

如图，$p(5,5)$ **等于从** A **到** B **不能穿过对角线的路径数. 即** $p(5,5)=42$，**所求的概率为** $\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$.

13 **因为** $a,b\in[1,3]$，$a+b=4$，**所以**

$$ab=a(4-a)=-(a-2)^2+4\in[3,4].$$

河北

设 $u=\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}$,则

$$\begin{aligned}u^{2}&=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}\\&=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\\&=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{a^{2}+b^{2}}{ab}}\\&=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^{2}-2ab}{ab}}\\&=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{16-2ab}{ab}}\\&=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{17}{ab}-2}.\end{aligned}$$

由于 $\frac{4}{x}$ 和 $x+\frac{17}{x}$ 在 $[3,4]$ 上均为减函数,所以

$$10\leqslant u^{2}\leqslant\frac{16}{3}+2\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{16+2\sqrt{60}}{3}<\frac{16+2\sqrt{64}}{3}=\frac{32}{3},$$

即 $\sqrt{10}\leqslant u<\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

14 (1) 取 AP 的中点 E,连结 ED,则 $ED\parallel CN$,再取 EP 的中点即为所求点 Q,因为 $MQ\parallel ED$,故 $MQ\parallel CN$,所以 M、N、C、Q 四点共面,平面 MCN 与 AP 的交点 Q 即为 AP 的四等分点,所以 $PQ=1$.

(2) 易证平面 $MEN\parallel$ 底面 $ABCD$,所以截面 MCN 与平面 MEN 所成的二面角即为截面 MCN 与底面 $ABCD$ 所成的二面角. 因为 $PA\perp ABCD$,故 $PA\perp$ 面 MEN,过 E 作 $EF\perp MN$,垂足为 F,连结 QF,则由三垂线定理可得 $QF\perp MN$,所以 $\angle QFE$ 为截面 MCN 与平面 MEN 所成二面角的平面角,在直角三角形 MEN 中,$ME=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$EN=1$,$MN=\frac{\sqrt{6}}{2}$,则 $EF=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\tan\angle QFE=\sqrt{3}$,故

$\angle QFE=\frac{\pi}{3}$.

（3）因 EP 的中点为点 Q，且平面 MCN 与 PA 交于点 Q，所以点 A 到平面 MCN 的距离即点 E 到平面 MCN 的距离的 2 倍. 由（2）知 $MN\perp$ 面 QEF，平面 $MCNQ\perp$ 平面 QEF 且交线为 QF，作 $EH\perp QF$，垂足为 H，则 $EH\perp$ 平面 QEF，EH 为点 E 到平面 MCN 的距离. 在直角三角形 EQF 中，$EF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle QFE=\frac{\pi}{3}$，故 $EH=\frac{1}{2}$. 所以点 A 到平面 MCN 的距离为 1.

15 （1）由递推关系得 $a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)$. 当 $n=1$ 时，$a_1=3\equiv 3(\mathrm{mod}4)$，假设 $a_n\equiv 3(\mathrm{mod}4)$，即 $a_n=4k+3$，那么

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n(a_n+1)-1\\&=4(4k+3)(k+1)-1\\&\equiv 3(\mathrm{mod}4),\end{aligned}$$

所以对所有 n，$a_n\equiv 3(\mathrm{mod}4)$.

（2）由递推关系易得 $a_{n+1}+1=4a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1$，不妨设 $m<n$，易得 $a_m\mid a_n+1$，令 $a_n+1=qa_m$，$q\in\mathbf{N}^*$，则

$$(a_m,a_n)=(a_m,qa_m-1)=(a_m,a_m-1)=1.$$

16 （1）设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意得

$\begin{cases}a^2-b^2=6,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2.\end{cases}$

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

因为直线 l 平行于 OM，设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，由

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$$

河北

得

$$x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,则 $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1x_2 = 2m^2 - 4$.
因为直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A、B,所以

$$\Delta = (2m)^2 - 4(2m^2 - 4) > 0,$$

所以 $m \in (-2, 2)$,且 $m \neq 0$.

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2}|m| \cdot |x_1 - x_2| \\ &= \frac{1}{2}|m| \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= |m| \cdot \sqrt{4 - m^2} \\ &= \sqrt{m^2(4 - m^2)} \leqslant 4, \end{aligned}$$

当且仅当 $m^2 = 4 - m^2$,即 $m = \pm\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 4.

（2）设直线 MA、MB 的斜率分别为 k_1、k_2. 又因为 $M(2, 1)$,则 $k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}$, $k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$,只需证明 $k_1 + k_2 = 0$ 即可.

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \\ &= \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1\right)(x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1\right)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{2m^2 - 4 - (m - 2)(-2m) - 4(m - 1)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} \\ &= \frac{2m^2 - 4 - 2m^2 + 4m - 4m + 4}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 0, \end{aligned}$$

河北

故直线 MA、MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

17 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=mx-2+\frac{1}{x+1}$，$f'(0)=-1$，所以在切点 $P(0,1)$ 处，切线 l 的斜率为 -1，因此切线方程为 $y=-x+1$. 已知切线 l 与曲线 C 有唯一的公共点，所以方程 $\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1)=0$ 有且只有一个实数解. 显然 $x=0$ 是方程的一个解. 令

$$g(x)=\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1),$$

$$g'(x)=mx-1+\frac{1}{x+1}=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}.$$

① 当 $m=1$ 时，$g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geqslant 0$（只有 $x=0$ 时等号成立），所以 $g(x)$ 在$(-1,+\infty)$ 上单调递增，即 $x=0$ 是方程唯一个实数解.

② 当 $m>1$ 时，由

$$g'(x)=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}=0$$

得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1}{m}-1\in(-1,0)$. 在区间$\left(-1,\frac{1}{m}-1\right)$上，$g'(x)>0$；在区间$\left(\frac{1}{m}-1,0\right)$上，$g'(x)<0$；所以函数 $g(x)$ 在 $\frac{1}{m}-1$ 处有极大值 $g\left(\frac{1}{m}-1\right)$，且 $g\left(\frac{1}{m}-1\right)>g(0)=0$；而当 $x\to-1$ 时，$g(x)\to-\infty$，因此 $g(x)=0$ 在$\left(-1,\frac{1}{m}-1\right)$内也有一个解. 即当 $m>1$ 时，不合题目的条件.

综上讨论得 $m=1$.

(2) $f'(x)=\frac{mx^2+(m-2)x-1}{x+1}(x>-1)$，

河北

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) = mx^2 + (m-2)x - 1 < 0.$$

因为

$$\Delta = (m-2)^2 + 4m = m^2 + 4 > 0,$$

且对称轴为 $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{m} > -1$,

$$h(-1) = m - (m-2) - 1 = 1 > 0,$$

所以方程 $h(x) = 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 内有两个不同实根 x_1、x_2，即 $h(x) = mx^2 + (m-2)x - 1 < 0$ 的解集为 (x_1, x_2)，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[x_1, x_2]$.

$$\begin{aligned} t &= x_2 - x_1 \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{m-2}{m}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{m}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}}. \end{aligned}$$

由于 $m \geqslant 1$，所以 $1 < \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \leqslant \sqrt{5}$. 函数 $y = f(x)$ 的递减区间长度 t 的取值范围为 $(1, \sqrt{5}]$.

03

2010 年全国高中数学联赛山西省预赛

2010 年全国高中数学联赛山西省预赛于 2010 年 9 月 11 日上午 8:30 至 11:00 举行，共有九千多名中学生参加此次预赛，并从中选拔出一千名学生参加于 10 月 17 日举行的全国高中数学联赛.

山西省预赛所涉及的知识范围基本参照现行《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学内容和要求，但在方法的要求上有所提高，主要考查学生对基本知识和基本技能的掌握情况，以及综合、灵活运用知识的能力. 试卷包括 8 道填空题和 3 道解答题，全卷满分 120 分，考试时间为两个半小时.

山西省预赛的命题工作由省数学会负责，组织工作在科协五学科竞赛管理委员会办公室的指导下进行，参加全国高中数学联赛的名单根据预赛成绩并参照各地市参赛的人数确定.

山西

试　题

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 十二个互不相同的正整数之和为 2010,则这些正整数的最大公约数的最大值是________.

2 函数 $f(x)=ax^2-\sqrt{2}$,若 $f(f(\sqrt{2}))=-\sqrt{2}$,则 $a=$________.

3 设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n\cdot(n+1)}$,则 $\left[\frac{2a_n}{n}\right]=$________.

4 设 $A(0, b)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴端点,B 是椭圆上的一点,$C(0, -1)$ 是点 B 在 y 轴上的投影,若 $AB=3\sqrt{2}$,$AC=BC$,则椭圆焦距为________.

5 若 $x\in[0, \pi]$,则函数 $y=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的值域是________.

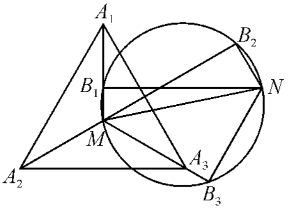
6 正四棱锥的侧棱长为 1,则其体积的最大值为________.

7 数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1$,$a_n+a_{n+1}=-n^2$,则 $a_{15}=$________.

8 如果四位数 n 的四个数位中至多含有两个不同的数码,则称 n 为“简单四位数”;例如 5555 和 3313 等等,那么,简单四位数的个数是________.

二、解答题(共 56 分)

9 (16 分)M 是正三角形 $A_1A_2A_3$ 的中心,N 是其所在平面上的任意一点,以 MN 为直径的圆分别交直线 MA_i 于 B_i,$i=1, 2, 3$;证明:$MB_1^2+MB_2^2+MB_3^2=NB_1^2+NB_2^2+NB_3^2$.



(第 9 题)

山西

10 （20 **分）设** $x_i \geqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，**约定** $x_{n+1} = x_1$，**证明：**

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

11 （20 **分）一次足球邀请赛共安排了** n **支球队参加，每支球队预定的比赛场数分别是** $m_1, m_2, \cdots, m_n$，**如果任两支球队之间至多安排了一场比赛，则称**$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$**是一个有效安排. 证明：如果**$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$**是一个有效安排，且** $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$，**则可去掉一支球队，并重新调整各队之间的对局情况，使得**$(m_2-1, m_3-1, \cdots, m_{m_1+1}-1, m_{m_1+2}, \cdots, m_n)$ **也是一个有效安排.**

解　答

1 15　**提示：设最大公约数为** d，12 **个数分别为** $a_1d, a_2d, \cdots, a_{12}d$，**其中**$(a_1, a_2, \cdots, a_{12})=1$，**记** $S=\sum_{i=1}^{12}a_i$，**则** $2010=Sd$，**欲使** d **最大，当使** S **取最小，由于** $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$ **互异，则**

$$S \geqslant 1+2+\cdots+12=78.$$

因 $S \mid 2010$，**但**

$$2010=2\times3\times5\times67,$$

其大于 67 **的最小正因数是** $2\times67=134$，**所以** $d\leqslant15$，**且** $d=15$ **可以取到，只需令**

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{11}, a_{12})=(1, 2, \cdots, 11, 68)$$

即可.

2 0 **或** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　**提示：因为**

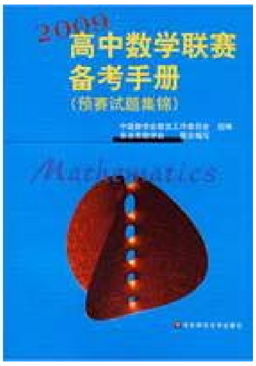
$$a(a(\sqrt{2})^2-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}=-\sqrt{2},$$

即 $a(2a-\sqrt{2})^2=0$，**所以** $a=0$ **或** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

“奥数”高中预赛篇

《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》

中国数学会普及工作委员会 组编



◆收录了当年各省市预赛试题和优秀解答（约 20 份）

◆试题在遵循现行教学大纲，体现新课标精神的同时，在方法的要求上有所提高

◆命题人员大多同时兼任各省市高考命题工作，试题对高考有一定的指导作用

读者对象： 参加预赛和联赛的高中生、竞赛教练员、高中教师

学奥数

这里总有一本适合你

华东师范大学出版社